Structure d'espaces vectoriels

Exercice 1: Parmi les espaces suivants, lesquels sont des espaces vectoriels ?

1. L'ensemble des fonctions continues en 0.
2. L'ensemble des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$.
3. L'ensemble des fonctions prenant la valeur 1 en 0.
4. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ converge}\}$
5. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ bornée}\}$
6. $\{f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}), f(a) = f(b)\}$
7. $\{f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}), \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0\}$
8. $\{f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f(1) = f'(1) = 0\}$
9. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ x+y=0\right\}$
10. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ x+y=1\right\}$
11. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ xy=0\right\}$
12. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ xy \geqslant 0\right\}$
13. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ x \leqslant y\right\}$
14. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ 2x+3y=0\right\}$

Exercice 2: Montrer que les espaces suivants sont formés des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs à déterminer.

1. Dans $\mathbb{R}[X]$: $F = \{aX^3 + bX + c,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.
2. Dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$: $F = \{x \mapsto (a+b)\mathbf{e}^x + (a-b)\mathbf{e}^{-x},\ a,b \in \mathbb{R}\}$.
3. Dans $\mathbb{R}^4$: $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+t=0 \text{ et } x+3y+4z-3t=0\right\}$.

Sous-espaces vectoriels

Exercice 3: Posons $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$.
Montrer que H un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ en l'écrivant comme sous-espace vectoriel engendré.

Exercice 4: Soient F et G deux sous-espaces vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer l'équivalence suivante :

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } F \supset G$$

Exercice 5:
Soit u et v deux vecteurs non colinéaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Comparer $\mathrm{Vect}(u,v)$, $\mathrm{Vect}(u)$, $\mathrm{Vect}(u,\lambda u)$ et $\mathrm{Vect}(u, v+\lambda u)$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exercice 6: Soit A et B deux parties d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Comparer $\mathrm{Vect}(A \cap B)$ et $\mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B)$
2. Comparer $\mathrm{Vect}(A \cup B)$ et $\mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$.

Exercice 7: Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, on considère les fonctions suivantes : $f_1 : x \mapsto e^{\mathbf{i}x}$; $f_2 : x \mapsto e^{-\mathbf{i}x}$. Montrer que $\mathrm{Vect}(f_1,f_2) = \mathrm{Vect}(\cos,\sin)$.

Exercice 8: Démontrer que les seuls sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathbb{K},+,\cdot)$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{K}$.

Somme de sous-espaces vectoriels

Exercice 9: On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+z=0=t\right\} \text{ et } G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x=y=0\right\}$$

Montrer que $F + G = \mathbb{R}^4$.

Exercice 10: On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$ suivants :
$F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(1)+P(2) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(X+3)$.
Montrer que F et G sont en somme directe.

Exercice 11:
Soit $H = \{(a-b, a, a-3b),\ a,b \in \mathbb{R}\}$ et $R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y-z=0\right\}$.
Déterminer $H \cap R$. A-t-on $H \oplus R$?

Somme de plusieurs sous-espaces vectoriels

Exercice 12:
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.
On définit $F_1 + \cdots + F_p = \{v_1 + \cdots + v_p \ / \ (v_1, \cdots, v_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p\}$..
On a $F_1 + ... + F_p = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{p} F_i\right)$. La somme est directe lorsque la décomposition de tout vecteur de $F_1 + \cdots + F_p$ comme somme d'éléments des F_i est unique. Dans ce cas, on note $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ ou $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.
Déterminer 3 sous-espaces vectoriels F, G et H de $\mathbb{R}^2$ tels que $F \oplus G$, $F \oplus H$, $H \oplus G$ et $F + G + H$ non directe.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Exercice 13:
Soit $F = \mathrm{Vect}\,((1, 0, -1), (1, 1, 1))$ et $G = \mathrm{Vect}\,((0, 1, 1), (0, 1, 0))$.

1. Montrer que les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ appartiennent à l'espace vectoriel $F + G$.
2. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^3$. A-t-on $F \oplus G = \mathbb{R}^3$?

Exercice 14: Soit $F = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et
$G = \{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
Montrer que $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = F \oplus G$.

Exercice 15: Soit $E = \mathscr{C}([-1; 1], \mathbb{R})$.
Soient $F = \{f \in E \mid \int_{-1}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t = 0\}$ et $G = \{\text{fonctions constantes de } E\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 16: Soient l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,
$F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = 0\}$ et $G = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = u_{2n+1}\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Familles libres

Exercice 17: Les familles suivantes sont-elles des familles libres de $\mathbb{R}^3$?

1. $((1, 0, 1), (1, 2, 2))$
2. $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$
3. $((1, 2, 1), (2, 1, -1), (1, -1, -2))$
4. $((1, -1, 1), (2, -1, 3), (-1, 1, -1))$

Exercice 18: Dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}([0; 2\pi], \mathbb{R})$ on note, $\forall x \in [0, 2\pi]$,

$$f_1(x) = \cos(x),\ f_2(x) = x\cos(x),\ f_3(x) = \sin(x),\ f_4(x) = x\sin(x)$$

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est une famille libre de E.

Exercice 19: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $E = \mathbb{K}_{n+1}[X]$.
Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $P_k = X^{k+1} - X^k$.
Montrer que la famille $(P_0, ..., P_n)$ est une famille libre de E.

Bases d'un espace vectoriel

Exercice 20: Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose

$$P_1 = X^2 + 1,\ P_2 = X^2 + X - 1,\ P_3 = X^2 + X.$$

Montrer que $\mathscr{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer les coordonnées de $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice 21: Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[-1, 1]$ qui sont affines sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 1]$. Démontrer que E est un espace vectoriel et en donner une base.